a)

$$S+iS'=1+(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos\theta+i\sin 2\theta)+.....+\cos n\theta+i\sin n\theta$$

$$S+iS'=1+e^{i\theta}+e^{2i\theta}+.....+e^{ni\theta}$$

D'après 1)

$$1-e^{i(n+1)\theta}=(1-e^{i\theta})\left[1+e^{i\theta}+e^{2i\theta}+.....+e^{in\theta}\right]$$

$comme\ e^{i\theta}\neq 1\ car\ \theta\neq 0(2\pi)$

Alors

$$1+e^{i\theta}+e^{2i\theta}+.....+e^{in\theta}=\frac{1-e^{i\theta(n+1)}}{1-e^{i\theta}}$$

Par suite :

$$S+iS'=\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$$

b) $S\in IR\ et\ S'\in IR$ d'où $S=\mathrm{Re}\left[\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right]$

d'après 2)

$$1-e^{i\theta}=-2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$1-e^{i(n+1)\theta}=-2i\sin\left[\frac{(n+1)\theta}{2}\right]e^{i\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}$$

D'où

$$\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}e^{i\left(\frac{n\theta}{2}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\left[\cos\frac{n}{2}\theta+i\sin\frac{n}{2}\theta\right]$$

$$S=\mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\cos\left(n\frac{\theta}{2}\right)\quad et\quad S'=\mathrm{Im}\left(\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}.\sin\left(n\frac{\theta}{2}\right)$$

Qarray.tn - Aqra Blech- Qarray.tn